Писмени део испита из Квантне теоријске физике, болоња, Фебруар 2017

1. Скаларни производ двеју векторских опсервабли $\hat{\vec{\sigma}}_1$ и $\hat{\vec{\sigma}}_2$ које делују над различитим Хилбертовим просторима стања $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ дефинише опсерваблу $\hat{\vec{\sigma}}_1 \cdot \hat{\vec{\sigma}}_2 = \sum_i \hat{\sigma}_{1i} \otimes \hat{\sigma}_{2i}$ која делује над укупним простором стања. Упростити израз $\hat{\sigma}^k$.

2. Задат је оператор

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \imath\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{p}_x.$$

   Доказати да он задовољава комутаторску једнакост $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I}$. Затим експлицитним рачуном (деловањем на одговарајуће Ермитове функције) у координатној репрезентацији показати једнакости: $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ и $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ где је $|n\rangle$ својствено стање оператора $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, односно важи својствена једнакост $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$.

3. Стање електрона у водониковом атому задато је условима: вероватноћа да се мерењем енергије у овом стању добије вредност $E_n = -\mu Z^2 e^4/8\hbar^2$ (μ–релативна маса) једнака је јединици. При томе, вероватноће да се симултаним мерењем добију и вредности $2\hbar^2$ за $\hat{\vec{L}}^2$, и $\pm\hbar$ за $\hat{L}_z$ износе нула. Одредити такво стање и наћи дисперзију опсервабле $\hat{r}^n$ у том стању.

Први задатак 11 поена, а остали по 12.